Clasificación de subconjuntos compactos numerables en algunos espacios Polacos

Autor: Merino Toapanta, Andrés Esteban

Tutor: Álvarez Samaniego, Borys Yamil

Facultad de Ciencias, Universidad Central del Ecuador

Maestría en Matemáticas Puras y Aplicadas

Trabajo de titulación modalidad Proyecto de Investigación previo a la obtención del título de Magíster en Matemáticas Puras y Aplicadas

Quito, 2022

Derechos de autor

Firma: ______________________

Andrés Esteban Merino Toapanta
CC: 171550457-5
Dirección electrónica: aemerinot@uce.edu.ec

Aprobación del tutor

En mi calidad de Tutor del Trabajo de Titulación, presentado por **Andrés Esteban Merino Toapanta**, para la optar por el Grado de **Magíster en Matemáticas Puras y Aplicadas**; cuyo título es **Clasificación de subconjuntos compactos numerables en algunos espacios Polacos**, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del tribunal examinador que se designe.

En la ciudad de Quito, a los 28 días del mes deseptiembre de 2022.

Borys Yamil Álvarez Samaniego
Docente-Tutor
CC: 171550457-5

Dedicatoria

A

Agradecimiento

A

Tabla de contenidos

Resumen

Título: Clasificación de subconjuntos compactos numerables en algunos espacios Polacos

Autor: Andrés Esteban Merino Toapanta
Tutor: Borys Yamil Álvarez Samaniego

Resumen de máximo 250 palabras.

Palabras clave: Teoría Descriptiva de Conjuntos, derivada de Cantor-Bendixson, espacios polacos, cardinalidad, conjuntos compactos, conjuntos numerables.

Abstract

Title: Classification of Compact Countable Subsets of Some Polish Spaces

Author: Andrés Esteban Merino Toapanta
Tutor: Borys Yamil Álvarez Samaniego

Traducción técnica del párrafo del resumen. Debe ser una traducción certificada.

Key words: Descriptive Set Theory, Cantor-Bendixson derivative, polish spaces, cardinality, compact sets, countable sets.

Capítulo 1. Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus. Nullam condimentum massa sit amet arcu feugiat, sed consectetur ligula euismod. Donec porttitor nisl id lacinia cursus. Vivamus vehicula metus ullamcorper mollis scelerisque. Nullam diam lacus, venenatis vitae placerat ut, maximus at libero. Praesent placerat arcu vel faucibus auctor. Donec non magna sit amet neque mattis vulputate. In viverra ac nunc nec bibendum. Mauris scelerisque, nisl et vestibulum molestie, magna ligula convallis ligula, sit amet bibendum ligula leo et odio. Cras vulputate dolor vitae nisi maximus, id vulputate ligula mollis. Donec sem nibh, laoreet a leo sit amet, pulvinar eleifend ipsum. Morbi tincidunt urna eu cursus ultrices.

1.1 ¿Cómo citar en LaTeX?

Para las citas puede utilizar los siguientes comandos según sea adecuado:

- Cita completa entre paréntesis `\parencite{ }`: (Cantor, 1883)
- Cita completa sin paréntesis `\textcite{ }`: Cantor (1883)
- Cita completa entre paréntesis `\cite{ }`: Cantor, 1883
- Cita de autor `\citeauthor{ }`: Cantor
- Cita de año `\citeyear{ }`: 1883
- Cita con opciones extras `\parencite[ ][ ]{ }`: (ver Cantor, 1883, p. 66)

Para citas textuales cortas: como indica Cantor (1883) “lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus” (p. 6). De manera análoga también se puede escribir: tenemos que “lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus” (Cantor, 1883, p. 6). Para citas textuales largas: como indica Cantor (1883):

> Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus. Nullam condimentum massa sit amet arcu feugiat, sed consectetur ligula euismod. Donec porttitor nisl id lacinia cursus. Vivamus vehicula metus ullamcorper mollis scelerisque. Nullam diam lacus, venenatis vitae placerat ut, maximus at libero. Praesent placerat arcu vel faucibus auctor. (p. 6)

O de manera análoga: tenemos que:

> Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus. Nullam condimentum massa sit amet arcu feugiat, sed consectetur ligula euismod. Donec porttitor nisl id lacinia cursus. Vivamus vehicula metus ullamcorper mollis scelerisque. Nullam diam lacus, venenatis vitae placerat ut, maximus at libero. Praesent placerat arcu vel faucibus auctor. (Cantor, 1883, p. 6)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus. Nullam condimentum massa sit amet arcu feugiat, sed consectetur ligula euismod. Donec porttitor nisl id lacinia cursus. Vivamus vehicula metus ullamcorper mollis scelerisque.

Nullam diam lacus, venenatis vitae placerat ut, maximus at libero. Praesent placerat arcu vel faucibus auctor. Donec non magna sit amet neque mattis vulputate. In viverra ac nunc nec bibendum. Mauris scelerisque, nisl et vestibulum molestie, magna ligula convallis ligula, sit amet bibendum ligula leo et odio. Cras vulputate dolor vitae nisi maximus, id vulputate ligula mollis. Donec sem nibh, laoreet a leo sit amet.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut aliquet, elit vitae tristique luctus, sem ligula maximus justo, ac laoreet ante neque in purus, ac laoreet ante neque in purus, ac laoreet ante neque in purus.

Capítulo 2. Conceptos de Topología

En el presente capítulo se revisan algunos conceptos básicos de la Topología General, que serán utilizados posteriormente. Esta revisión enfatiza las propiedades de los conjuntos compactos y de la topología de orden. La referencias principales para este capítulo son Cantor (1883) y Pinter (1971), en los cuales constan las proposiciones enunciadas a continuación, Además, las demostraciones detalladas de varios de estos enunciados pueden ser encontradas en Merino (2014); aquí, únicamente se presentarán las demostraciones relacionadas con números ordinales o topologías de orden.

2.1 Espacios Topológicos

Sea E un conjunto, $\tau \subseteq \mathscr{P}(E)$ es una *topología* sobre E si se cumplen las siguientes propiedades:

I) $E \in \tau$ y $\varnothing \in \tau$;

II) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$; y

III) sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ, entonces, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Dado un espacio topológico (E, τ), y un subconjunto $F \subseteq E$, se tiene que $\tau_F = \{A \cap F : A \in \tau\}$ es una topología sobre F, por lo tanto, se denomina a (F, τ_F) como un *sub-espacio topológico* de (E, τ).

DEFINICIÓN 2.1 (Clausura)**.** *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. La* clausura *de A, notada $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

Con esto, se tiene que un subconjunto A de un espacio topológico es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean (E, τ) un espacio topológico y A, B subconjuntos de E. Se tiene que*

I) *si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$; y*

II) *si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$.*

Demostración. Ver Merino (2014). □

Ahora, se puede puede expandir la definición de conjunto derivado utilizando Recursión Transfinita.

DEFINICIÓN 2.2 (Derivada de Cantor-Bendixson)**.** *Sean (E,τ) un espacio topológico y $K \subseteq E$. Para α un ordinal, se define el α-*ésimo derivado *de K, notado por $K^{(\alpha)}$, de la siguiente manera:*

- $K^{(0)} = K$*;*
- $K^{(\alpha+1)} = (K^{(\alpha)})'$ *para todo α ordinal; y*
- $K^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} K^{(\beta)}$ *para todo ordinal límite $\lambda \neq 0$.*

Con esto, se puede extender las proposiciones anteriores como sigue.

COROLARIO 2.2. *Sean (E,τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E, tales que $A \subseteq B$. Se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo $\alpha \in OR$.*

Demostración. Se procede por Inducción Transfinita, se tiene que $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$, por hipótesis. Ahora, supóngase que para α un ordinal, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, por la Proposición 2.1, se sigue que $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' \subseteq (B^{(\alpha)})' = B^{(\alpha+1)}$. Finalmente, supóngase que, para $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, se tiene que $A^{(\beta)} \subseteq B^{(\beta)}$ para todo $\beta < \lambda$. De aquí, se sigue que

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} A^{(\beta)} \subseteq \bigcap_{\beta<\lambda} B^{(\beta)} = B^{(\lambda)}.$$

Al demostrarse los tres casos, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo ordinal α. □

Capítulo 3. Conclusiones

Referencias

Cantor, G. (1883). Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu a *N* dimensions. *Acta Mathematica*, *2*, 409-414.

Merino, A. (2014). *Clasificación de Subconjuntos Compactos Numerables de los Reales* (inf. téc.) [Tesis de pregrado.]. Escuela Politécnica Nacional.

Pinter, C. (1971). *Set Theory*. Addison-Wesley.