Teorema de Morley

Luiz Felipe Abreu Almeida

28 de maio de 2019

1 Introdução

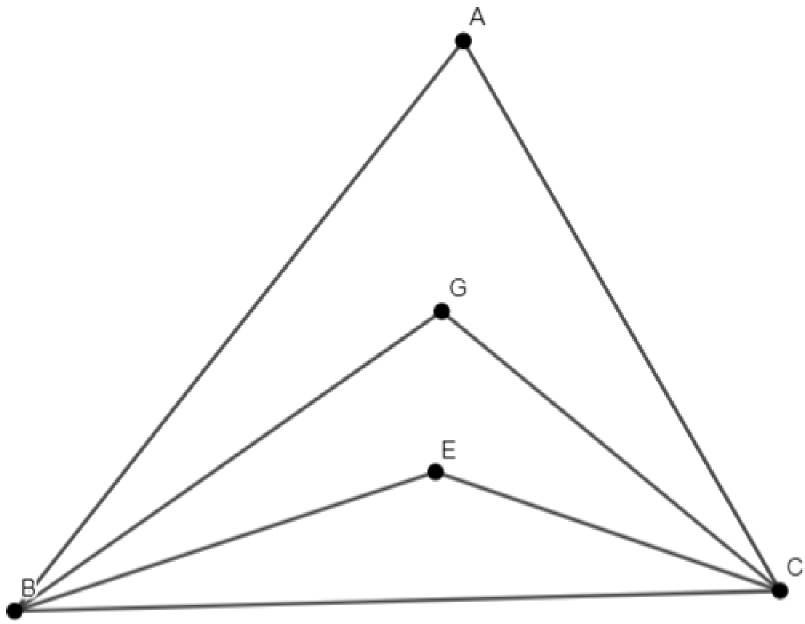
Primeiramente, vamos enunciar o Teorema de Morley:

“Em qualquer triângulo, os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes formam sempre um triângulo equilátero.”

Observando a prova de Dan Sokolowsky publicada na *Revista Escolar de la Olimíada Iberoamerica de Matemática* e de Coxeter e Greitzer encontrada no livro *Geometry Revisited*, podemos determinar uma demonstração que utiliza apenas os conceitos da Geometria Euclidiana Plana.

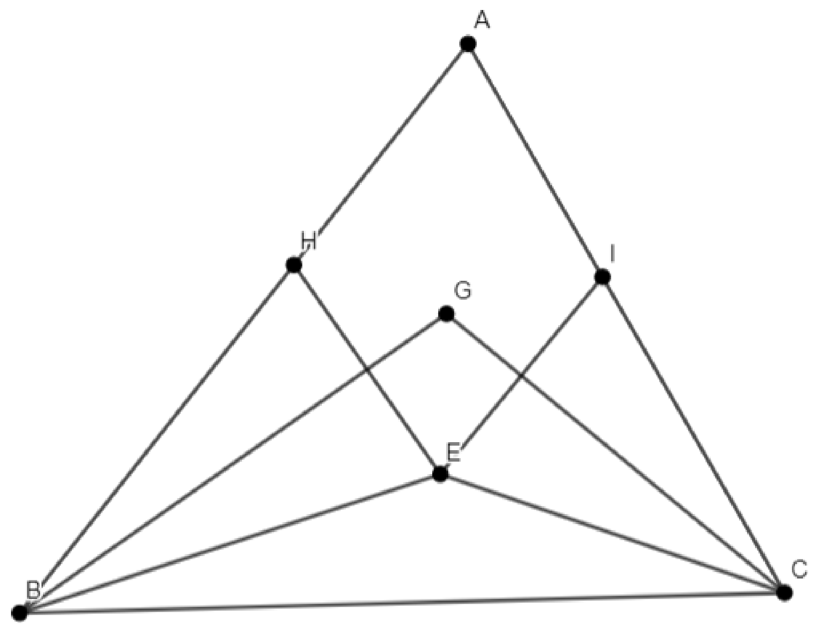
1.1 Demonstração - por Geometria Euclidiana Plana

Dado um triângulo ABC, seja $\hat{A} = 3\alpha$, $\hat{B} = 3\beta$ e $\hat{C} = 3\gamma$. Em seguida, constroem-se as trissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$, assim obtendo os pontos de encontro dessas trissetrizes nomeados de E e G, onde E é o encontro das trissetrizes adjacentes. Desta forma, BE e CE são bissetrizes dos ângulos $C\hat{B}G$ e $B\hat{C}G$, respectivamente.



Pode-se observar que o ponto E é incentro do triângulo BCG. Desta forma, traçando as retas r, s perpendiculares à BG e GC passando pelo ponto E, encontraremos os pontos:

$$H = r \cap AB,\ J = r \cap BG,\ K = s \cap GC,\ I = s \cap AC.$$



Temos, por contrução, que $E\hat{B}J = J\hat{B}H$ e $E\hat{J}B = H\hat{J}B$. Desta forma, tendo JB como lado comum podemos concluir que $EBJ \cong HBJ$. Conclui-se então que $BH \cong BE$ e portanto o triânguo EBH é isosceles, implicando que BJ é a altura relativa a base e portanto $JE \cong JH$.

Analogamente, teremos $KE \cong KI$. Mas, como temos E é o incentro do triângulo BGC, isso implica que $JE \cong EK$ que nos leva a concluir que:

$$HJ \cong JE \cong EK \cong KI \ HE \cong EI$$

Podemos observar que $E\hat{B}C \cong E\hat{B}J = \beta$ e $E\hat{C}B \cong E\hat{C}K = \gamma$. Dessa forma, teremos:

$$B\hat{E}C = 180^\circ - \beta - \gamma$$

Além disso, como os triângulos EBJ e EKC são retângulos em J e K, respectivamente, temos que:

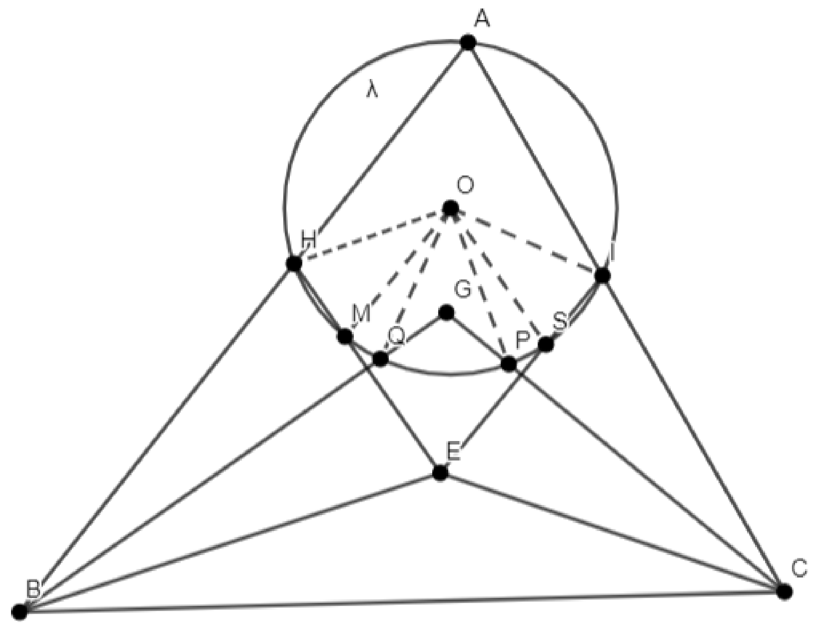
$$B\hat{E}J = 90^\circ - \beta \text{ e } C\hat{E}K = 90^\circ - \gamma$$

Portanto,

$$H\hat{E}I = 360^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma) - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) \ H\hat{E}I = 2(\beta + \gamma)$$

Mas sabemos, do triângulo ABC que $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, logo $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ que implica em $\beta + \gamma = 60^\circ - \alpha$

Por fim, chegamos que $H\hat{E}I = 120^\circ - 2\alpha$



Agora, contrõe-se uam circunferência λ que contém os pontos A, H e I.

Vamos definir os seguintes pontos:

$$O = centro(\lambda)\ M = \lambda \cup HE,\ Q = \lambda \cup BG\ S = \lambda \cup IE,\ P = \lambda \cup CG$$

E em seguida, traçar os raios, destes pontos, da circunferência λ. Pelo teorema do ângulo central teremos que $H\hat{O}I = 2H\hat{A}I$, dessa forma:

$$H\hat{O}I = 6\alpha$$

Como $HE \cong EI$, $OH \cong OI$ (raio de λ) e OE é lado comum aos triângulos HOE e IOE, teremos, pelo caso de congruência LLL, que $HOE \cong IOE$. Dessa forma, $H\hat{O}E \cong I\hat{O}E$ e $H\hat{E}O \cong I\hat{E}O$ que implica que OE é bissetriz de $H\hat{O}I$ e $H\hat{E}I$.

Isso nos leva a concluir que:

$$2O\hat{E}H = H\hat{E}I \rightarrow O\hat{E}H = 60° - \alpha\ 2H\hat{O}E = H\hat{O}I \rightarrow H\hat{O}E = 3\alpha$$
$$O\hat{H}E = 180° - (60° - \alpha) - 3\alpha = 120° - 2\alpha$$

Temos, por construção, que OHM é isosceles de base HM. Logo, $O\hat{H}M \cong O\hat{M}H$. Pelo teorema do ângulo externo, teremos

$$M\hat{O}E + O\hat{E}M = O\hat{M}H\ M\hat{O}E = (120° - 2\alpha) - (60° - \alpha) = 60° - \alpha$$

Isso vai nos dizer que o triângulo OME é isosceles de base OE. Analogamente, o triângulo OSE é isosceles de base OE e $S\hat{O}E = 60° - \alpha$ Como $S\hat{O}E \cong M\hat{O}E$, $OM \cong OS$ e eles possuem OE em comum, pelo caso de congruência LAL, teremos $OME \cong OSE$ e portando o quadrilátero $OMES$ é um losango.

Assim, podemos determinar que a reta que contém ME é paralela a reta que contém OS. Como $O\hat{H}E = 120° - 2\alpha = E\hat{E}H$, temos que o trapézio $OHES$ é isósceles. Dessa forma, a mediatriz BG de HE é também mediatriz de OS.

Como o ponto Q está sobre BG, temos $OQ \cong QS$. Mas $OQ \cong OS$, logo o triângulo OQS é equilátero, implicando que $Q\hat{O}S = 60°$.

Como o ângulo $S\hat{O}E = 60° - \alpha$ teremos que:

$$Q\hat{O}E = Q\hat{O}S - S\hat{O}E \; Q\hat{O}E = \alpha$$

Logo, teremos

$$Q\hat{O}H = 3\alpha - \alpha = 2\alpha \; S\hat{O}I = 3\alpha - \alpha = 2\alpha \; Q\hat{O}P = 2Q\hat{O}E = 2\alpha$$

Pelo teorema do ângulo central, teremos

$$Q\hat{A}H = Q\hat{O}H/2 = \alpha \; S\hat{A}I = S\hat{O}I/2 = \alpha \; Q\hat{A}P = Q\hat{O}P/2 = \alpha$$

Logo, os pontos Q e P estão sobre as trissetrizes de $\hat{A}$.

Como $OH \cong OQ \cong OP \cong OI$, temos $HOQ \cong QOP \cong POI$. Assim, $HQ \cong QP$.

Sabendo que Q está sobre a mediatriz de HE, temos $QE \cong QH$. Analogamente, $PE \cong PI$.

Isso nos leva a concluir que:

$$QE \cong HQ \cong QP \; EP \cong PI \cong QP \; QE \cong QP \cong PE$$

Conclunido assim que o triângulo QPE é equilátero e os pontos Q, E e S são os pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes.