SI $AB = I$ ENTONCES A ES INVERTIBLE Y $A^{-1} = B$

MEMO GARRO

Resumen y objetivos. Vamos a demostrar el notable teorema que dice que, dadas dos matrices cuadradras A y B del mismo tamaño, si $AB = I$, donde I es la matriz identidad del mismo tamaño que la matrices A y B, entonces A es invertible y $B^{-1} = A$. La prueba será directa y sólo usaremos el hecho de que si $|A| \neq 0$ entonces A es invertible. La pregunta es si puedes tú, estimado estudiante, ofrecer otra prueba de la que aquí se sugiere. Sirva además este texto como un ejemplo de escritura con LaTeX.

Teorema. *Sean $A = (a_{ij})_{n\times n}$ y $B = (b_{ij})_{n\times n}$ matrices cuadradas de tamaño n y sea I_n la matriz identidad de tamaño n. Si $AB = I_n$ entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.*

Demostración. Vamos a hacer los casos $n = 1$ y $n = 2$. El caso general se deja al estudiante.

$n = 1$. En este caso podemos escribir simplemente

$$A = (a), \qquad B = (b) \qquad \text{e} \qquad I_1 = (1).$$

Por lo que

$$AB = I_1 \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow ba = 1 \Leftrightarrow BA = I_1.$$

Y el teorema es inmediato.

$n = 2$. En este caso, tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la igualdad

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implica que al menos uno de los coeficientes del segundo renglón de A, a_{21} y a_{22}, es distinto de cero.

Supongamos que $a_{22} \neq 0$. De la igualdad

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0$$

depejamos b_{21} para obtener

$$b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} b_{11}.$$

Sustituimos en la igualdad

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1,$$

para obtener

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\frac{b_{11}}{a_{22}} = 1.$$

Esto implica que

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Por lo que A es invertible.

Ahora, por hipótesis $AB = I_2$. En consecuencia,

$$B = I_2B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I_2 = A^{-1}.$$

El caso $a_{21} \neq 0$ se trata de forma análoga por lo que se deja al estudiante. $\square$

Corolario. *Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño y A no es invertible, entonces AB no es invertible*

Demostración. Supongamos que AB es invertible. Para alguna matriz C, se cumple

$$(AB)C = I,$$

donde I es la matriz identidad del igual tamaño que las matrices A y B. Pero el producto de matrices es asociativo, de manera que $A(BC) = (AB)C$. Por lo que $A(BC) = I$. Pero, por el teorema anterior, esto implica que A es invertible. Una contradicción. $\square$

Corolario. *Sean A y B matrices cuadradas de igual tamaño. Entonces $AB = I$ si y sólo si $BA = I$. Donde I es la matriz identidad de igual tamaño que las matrices A y B.*

Demostración. Si $AB = I$ entonces A es invertrible y $A^{-1} = B$, por lo que $BA = I$.

Recíprocamente, si $BA = I$ entonces $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = I$, por lo que A^{T} es invertible y

$$B^{\mathrm{T}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Pero recordemos que A^{T} es invertible si y sólo si A es invertible, y en cuyo caso

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

En consecuencia $B = A^{-1}$ y $AB = I$. $\square$