Oscilaciones del Neutrino

Daniel Ocampo Henao

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y naturales, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Resumen

Las observaciones han mostrado que el número de neutrinos electrónicos ν_e que llegan a la tierra desde el sol es aproximadamente la mitad del número esperado de nuestro conocimiento de las reacciones nucleares que ocurren al interior del sol. Estas observaciones se explican como el resultado de que algunos neutrinos electrónicos ν_e se convierten en neutrinos muónicos ν_μ y neutrinos tauónicos ν_τ durante su recorrido entre su creación al interior del sol y su observación en la tierra. Este cambio de un sabor a otro se conoce como oscilacines del neutrino.

Se introduce un término de masa para el neutrino que es invariante de Lorentz en la densidad lagrangiana del modelo estándar (SM), y se describe el estado del neutrino $|\nu_\alpha\rangle$ $(\alpha = e, \mu, \tau)$ como una combinación lineal de autoestados de masa $|\nu_i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$, lo cual conduce a las oscilaciones del neutrino.

Palabras clave: Neutrino, Modelo estándar.

Introducción

Los neutrinos son partículas fundamentales que aparecen en tres tipos (o sabores) que se nombran de acuerdo al leptón cargado con el que interactúan por medio de la interaccin débil: neutrino electrónico ν_e, neutrino muónico ν_μ y neutrino tauónico ν_τ. Son los únicos fermiones que no tienen carga y, según el modelo estándar (SM), no tienen masa. Neutrinos de un determinado sabor se crean, por ejemplo, en procesos nucleares acompaados por su correspondiente leptón cargado. En los procesos de reacciones nucleares al interior del sol se crean ν_e en el proceso protón-protón. En la atmósfera, se crean ν_e y ν_μ mediante la colisin de rayos cósmicos con núcleos presentes en la alta atmósfera. Esto crea una serie de hadrones, principalmente piones. Los piones decaen de la forma $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$. A su vez el muón decae de la forma $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e$ (de manera similar decaen los π^+ y μ^+). Las observaciones han mostrado que el número de ν_e que llegan a la tierra desde el sol es aproximadamente la mitad del número esperado de nuestro conocimiento de las reacciones nucleares que ocurren al interior del sol. Estas observaciones se explican como el resultado de que algunos ν_e se convierten en ν_μ y ν_τ durante su recorrido entre su creación al interior del sol y su observación en la tierra. De igual manera, los neutrinos creados en la atmósfera pueden cambiar de sabor si viajan grandes distancias. En 2001 el Sudbury Neutrino Observatory (SNO) verificó la transformacin de ν_e provenientes del sol en ν_μ y ν_τ. En 1998, el experimento Super-Kamiokande confirmó la transmutación de los neutrinos creados en la alta atmósfera. Este cambio de un sabor a otro se conoce como oscilacines del neutrino. La confirmación de estas oscilacines lleva a dos conclusiones: 1) Los neutrinos se mezclan como los quarks, lo que significa que los estados de sabor son superposiciones lineales de autoestados de masa con energía y momento bien definido. 2) Los tres autoestados de masa no pueden tener la misma relación de energía-momento. Las oscilaciones del neutrino constituyen una evidencia de que hay física más allá del SM, ya que este postula que los neutrinos no tienen masa.

En este artículo se pretende mostrar cómo se puede introducir un término de masa para los neutrinos en la densidad lagrangiana del SM, y se describe el estado del neutrino $|\nu_\alpha\rangle$ $(\alpha = e, \mu, \tau)$ como una combinación lineal de autoestados de masa $|\nu_i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$, lo cual conduce a las oscilaciones del neutrino.

Lagrangiano para el neutrino con masa en el SM

El término de masa para el neutrino, invariante de Lorentz, más general posible que se puede introducir en la densidad lagrangiana del modelo estándar es

$$\mathcal{L}^{\nu}_{mass} = -(\nu^L_\alpha)^\dagger m_{\alpha\beta} \nu^R_\beta - (\nu^R_\beta)^\dagger m^*_{\beta\alpha} \nu^L_\alpha \tag{1}$$

donde $m_{\alpha\beta}$ es una matriz compleja 3x3 arbitraria, α y β corren sobre los tres tipos de neutrino e, μ, τ, y ν^L_α, ν^R_β son campos espinoriales de dos componentes izquierdo y derecho respectivamente.

Una matriz compleja arbitraria puede ser diagonalizada con ayuda de dos matrices unitarias $\mathbf{U^L}$ y $\mathbf{U^R}$ de la siguiente manera

$$m_{\alpha\beta} = U^{L*}_{\alpha i} m_i U^R_{\beta i}$$

$$m^*_{\beta\alpha} = U^{R*}_{\beta i} m_i U^R_{\alpha i}$$

donde m_i son tres masas positivas y reales. Si ahora definimos los autoestados de masa como

$$\nu^L_i = U^L_{\alpha i} \nu^L_\alpha \tag{2}$$

$$\nu^R_i = U^R_{\alpha i} \nu^R_\alpha \tag{3}$$

El término de masa toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\nu}_{mass} &= -(\nu^L_\alpha)^\dagger U^{L*}_{\alpha i} m_i U^R_{\beta i}\nu^R_\beta - (\nu^R_\beta)^\dagger U^{R*}_{\beta i} m_i U^L_{\alpha i}\nu^L_\alpha \\ &= -m_i\left[(U^L_{\alpha i}\nu^L_\alpha)^\dagger U^R_{\beta i}\nu^R_\beta + (U^R_{\beta i}\nu^R_\beta)^\dagger U^L_{\alpha i}\nu^L_\alpha\right] \\ &= -m_i\left[(\nu^L_i)^\dagger \nu^R_i + (\nu^R_i)^\dagger \nu^L_i\right]\end{aligned}$$

que tiene la misma forma del término de masa estándar de Dirac $-m(\psi^\dagger_L\psi_R + \psi^\dagger_R\psi_L)$. Veamos que las transformaciones dadas por las ecuaciones (2) y (3) conservan la forma del término dinámico:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\nu}_{dyn} &= i\left[(\nu^L_\alpha)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\nu^L_\alpha + (\nu^R_\alpha)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\nu^R_\alpha\right] \\ &= i\left[(\nu^L_\alpha)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu(U^L_{\alpha i})^\dagger(U^L_{\alpha i})\nu^L_\alpha + (\nu^R_\alpha)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu(U^R_{\alpha i})^\dagger(U^R_{\alpha i})\nu^R_\alpha\right] \\ &= i\left[(U^L_{\alpha i}\nu^L_\alpha)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu U^L_{\alpha i}\nu^L_\alpha + (U^R_{\alpha i}\nu^R_\alpha)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu U^R_{\alpha i}\nu^R_\alpha\right] \\ &= i\left[(\nu^L_i)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\nu^L_i + (\nu^R_i)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\nu^R_i\right]\end{aligned}$$

luego la densidad lagrangiana de neutrinos libres de masas m_1, m_2 y m_3 es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\nu} &= \mathcal{L}^{\nu}_{mass} + \mathcal{L}^{\nu}_{dyn} \\ &= -(\nu^L_\alpha)^\dagger m_{\alpha\beta}\nu^R_\beta - (\nu^R_\beta)^\dagger m^*_{\beta\alpha}\nu^L_\alpha \\ &+ i\left[(\nu^L_\alpha)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\nu^L_\alpha + (\nu^R_\alpha)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\nu^R_\alpha\right] \\ &= -m_i\left[(\nu^L_i)^\dagger\nu^R_i + (\nu^R_i)^\dagger\nu^L_i\right] \\ &+ i\left[(\nu^L_i)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\nu^L_i + (\nu^R_i)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\nu^R_i\right] \qquad (4)\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathbf{U^L}$ y $\mathbf{U^R}$ son matrices unitarias podemos invertir las ecuaciones (2) y (3) para obtener

$$\nu^L_\alpha = (U^L_{\alpha i})^*\nu^L_i \qquad (5)$$

$$\nu^R_\alpha = (U^R_{\alpha i})^*\nu^R_i \qquad (6)$$

de donde observamos que los neutrinos e, μ y τ son mezclas de neutrinos con masa definida ν_i. Veremos que esto lleva al fenómeno de oscilación de los neutrinos.

La densidad lagrangiana $\mathcal{L}^\nu$ para neutrinos libres lleva a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}^\nu}{\partial(\partial_\mu\nu^L_\alpha)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}^\nu}{\partial\nu^L_\alpha} &= 0 \\ i\partial_\mu\left[(\nu^L_\alpha)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\right] + (\nu^R_\beta)^\dagger m^*_{\beta\alpha} &= 0 \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\nu^L_\alpha - m_{\alpha\beta}\nu^R_\beta &= 0 \qquad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}^\nu}{\partial(\partial_\mu\nu^R_\alpha)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}^\nu}{\partial\nu^R_\alpha} &= 0 \\ i\partial_\mu\left[(\nu^R_\alpha)^\dagger\sigma^\mu\right] + (\nu^L_\beta)^\dagger m_{\alpha\beta} &= 0 \\ i\sigma^\mu\partial_\mu\nu^R_\alpha - m^*_{\beta\alpha}\nu^L_\beta &= 0 \qquad (8)\end{aligned}$$

Interpretaremos las soluciones a estas ecuaciones como funciones de onda de neutrinos para los tres tipos $\alpha = e, \mu, \tau$, no como campos de neutrinos. Buscaremos autoestados de energía con dependencia temporal e^{-iEt}. Neutrinos de cero masa tendrían soluciones en ondas planas. Para una onda en la dirección z

$$\nu^L_\alpha(z,t) = e^{-iE(t-z)}f_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \nu^R_\alpha = 0$$

donde f_α son constantes. La introducción de masas para el neutrino modifica estas soluciones permitiendo que las f_α dependan de z:

$$\nu^L_\alpha(z,t) = e^{-iE(t-z)}f_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (9)$$

$$\nu^R_\alpha(z,t) = e^{-iE(t-z)}g_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (10)$$

Llevando estas soluciones a las ecuaciones de Dirac (7) y (8) resulta

$$i\bar{\sigma}^0\partial_0\nu^L_\alpha(z,t) + i\bar{\sigma}^3\partial_3\nu^L_\alpha(z,t) - m_{\alpha\beta}\nu^R_\beta(z,t) = 0$$

$$i\bar{\sigma}^0\tfrac{\partial}{\partial t}\left[e^{-iE(t-z)}f_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] + i\bar{\sigma}^3\tfrac{\partial}{\partial z}\left[e^{-iE(t-z)}f_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$-m_{\alpha\beta}e^{-iE(t-z)}g_\beta(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$Ef_\alpha(z)\bar{\sigma}^0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - Ef_\alpha(z)\bar{\sigma}^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i\frac{d}{dz}f_\alpha(z)\bar{\sigma}^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - m_{\alpha\beta}g_\beta(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow i\frac{d}{dz}f_\alpha(z) - m_{\alpha\beta}g_\beta(z) = 0 \qquad (11)$$

$$i\sigma^0\partial_0\nu^R_\alpha(z,t) + i\sigma^3\partial_3\nu^R_\alpha(z,t) - m^*_{\beta\alpha}\nu^L_\beta(z,t) = 0$$

$$i\sigma^0\tfrac{\partial}{\partial t}\left[e^{-iE(t-z)}g_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] + i\sigma^3\tfrac{\partial}{\partial z}\left[e^{-iE(t-z)}g_\alpha(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] -$$

$$m^*_{\beta\alpha}e^{-iE(t-z)}f_\beta(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$Eg_\alpha(z)\sigma^0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - Eg_\alpha(z)\sigma^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i\frac{d}{dz}g_\alpha(z)\sigma^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - m^*_{\beta\alpha}f_\beta(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(2E - i\frac{d}{dz}\right)g_\alpha(z) - m^*_{\beta\alpha}f_\beta(z) = 0 \qquad (12)$$

donde se ha utilizado $\bar{\sigma}^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\sigma^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\sigma^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y $\bar{\sigma}^0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \sigma^0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{I}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Para energías del neutrino mucho mayores que su masa podemos despreciar $-i\frac{d}{dz}g_\alpha(z)$ comparado con $2Eg_\alpha(z)$ para obtener

$$g_\gamma = \frac{m^*_{\gamma\beta} f_\gamma(z)}{2E} \tag{13}$$

y así, por sustitución, obtenemos tres ecuaciones acopladas para $f_\alpha(z)$: (haciendo $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$)

$$i\frac{d}{dz} f_\beta(z) = \frac{m_{\beta\gamma} m^*_{\alpha\gamma} f_\alpha}{2E} \tag{14}$$

Diagonalizando las matrices $m_{\beta\gamma}$ y $m^*_{\alpha\gamma}$ de la forma $m_{\beta\gamma} = U^{L*}_{\beta i} m_i U^R_{\gamma i}$ y $m_{\alpha\gamma} = U^{L*}_{\alpha j} m_j U^R_{\gamma j}$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dz} f_\beta(z) &= \frac{U^{L*}_{\beta i} m_i U^R_{\gamma i} U^{R*}_{\gamma j} m^*_j U^L_{\alpha j} f_\alpha(z)}{2E} \\ &= \frac{U^{L*}_{\beta i} m_i \delta_{ij} m^*_j U^L_{\alpha j} f_\alpha(z)}{2E} \\ &= \frac{U^{L*}_{\beta i} U^L_{\alpha i} m_i m^*_i f_\alpha(z)}{2E} \\ &= \frac{U^*_{\beta i} U_{\alpha i} m_i^2 f_\alpha(z)}{2E} \end{aligned} \tag{15}$$

(Como no aparece $\mathbf{U}^R$, se hace $\mathbf{U}^L = \mathbf{U}$). Para resolver las ecuaciones (15) formamos combinaciones lineales de la forma

$$f_i(z) = U_{\beta i} f_\beta(z) \tag{16}$$

las cuales satisfacen, utilizando (15)

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dz} f_i(z) &= U_{\beta i}\frac{d}{dz} f_\beta(z) \\ &= \frac{U_{\beta i} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} m_j^2 f_\alpha(z)}{2E} \\ &= \frac{\delta_{ij} U_{\alpha j} m_j^2 f_\alpha(z)}{2E} \\ &= \frac{m_i^2 U_{\alpha i} f_\alpha(z)}{2E} \\ \Rightarrow i\frac{d}{dz} f_i(z) &= \left(\frac{m_i^2}{2E}\right) f_i(z) \end{aligned} \tag{17}$$

Estas ecuaciones que hemos obtenido son desacopladas y tienen como soluciones

$$f_i(z) = e^{-i(m_i^2/2E)z} f_i(0) \tag{18}$$

Así, de (2) y (9), podemos obtener la función de onda para el neutrino ν_i:

$$\begin{aligned} \nu_i(z,t) &= U_{\alpha i}\nu_\alpha(z,t) \\ &= e^{-iE(t-z)} U_{\alpha i} f_\alpha(z) \\ &= e^{-iE(t-z)} f_i(z) \\ &= e^{-iE(t-z)} e^{-i(m_i^2/2E)z} f_i(0) \\ \Rightarrow \nu_i(z,t) &= e^{-iEt+i(E-m_i^2/2E)z} f_i(0) \end{aligned} \tag{19}$$

Este estado tiene energía E y momento $p_i^2 = E - m_i^2 + m_i^4/4E^2$. Para $m_i^2 \ll E^2 \Rightarrow p_i^2 = E^2 - m_i^2$, la cual es la relación relativista para una partícula de masa m_i. En consecuencia, el neutrino ν_i transporta una masa m_i. ($\nu_i(z,t)$ son las funciones de onda izquierdas de ν_i^L.)

Supongamos que en $z = 0$ se crea un neutrino de clase α. La funcin de onda para ν_α es una superposición lineal de autoestados de masa ν_i.

$$\begin{aligned} f_\beta(z) &= U^*_{\beta i} f_i(z) \\ &= U^*_{\beta i} e^{-i(m_i^2/2E)z} f_i(0) \\ &= U^*_{\beta i} e^{-i(m_i^2/2E)z} U_{\alpha i} f_\alpha(0) \end{aligned} \tag{20}$$

Diferentes autoestados de masa se propagan con diferentes fases por lo que el tipo de neutrino cambia con z. Esta es la base teórica de las oscilaciones del neutrino.

Una vez encontrada esta función de onda para el neutrino se pueden encontrar cantidades como la probabilidad de que se de el proceso $\nu_\alpha \to \nu_\beta$, que se calcula con la amplitud de la función de onda y con las matrices de mezcla leptónica $\mathbf{U}$, aunque el desarrollo matemático está fuera del objetivo de este artículo.

Referencias

[1] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standar Model of Physics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.

[2] B.Kayser, *Neutrino Mass, Mixing, and Flavor Change*, Fermilab, 2008.

[3] C. Waltham, *Neutrino Oscillations for Dummies*, arXiv:physics/0303116

[4] J.S Diaz, *Violation of Lorentz and CPT invariance.* Tomado de https://www.itp.kit.edu/ jsdiaz/