Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Uso de LaTeX, convolución

Señales y Sistemas

Autores:
Argaez Herrera Antonia Margarita
Leguizamo Lara Daniela Denisse
Rojas Solis Juan Carlos
Grupo: 2TV1

Profesor:
Dr. Rafael Martínez Martínez

10 de septiembre de 2019

Índice

1. Objetivo

Los objetivos de esta práctica son los siguientes:

1. Conocer los componentes principales de LaTeX
2. Crear un documento que será la guía para tus reportes de prácticas
3. Perder el miedo a aprender rápido
4. Motivarte a usar LaTeX
5. Verificar algunas propiedades de convolución

2. Introducción

2.1. ¿Qué es la convolución?

La operación de convolución entre dos señales $f(t)$ y $x(t)$ genera una nueva señal $g(t)$, la operación se define como:

$$g(t) = f(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad [1]$$

2.1.1. Aplicaciones en Telemática

La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones en ciencias, ingeniería y matemáticas. En el caso de telemática, las aplicaciones son las siguientes:

- Procesamiento de imagenes
  El procesamiento de imágenes en el dominio espacial es un área de estudio visualmente rica que se ocupa de las técnicas de manipulación de píxeles. Se realizan diferentes operaciones sobre las imágenes, que se tratan simplemente como matrices bidimensionales.

- Procesamiento de audio
  Los auditorios, salas de cine y otras construcciones similares dependen en gran medida del concepto de reverberación porque mejora la calidad del sonido en gran medida.

  El proceso en el que la reverberación se simula digitalmente se denomina técnicamente reverberación de convolución". Con la reverberación de convolución, puede convolucionar la respuesta de impulso conocida de un área con la de un sonido deseado para simular el efecto de reverberación de un área en particular.

- Inteligencia artificial
  Las redes neuronales son un área de inteligencia artificial que diseña circuitos imitando conexiones en un cerebro humano. La interconexión entre las neuronas dentro del cerebro se modela como la interconexión entre los nodos de múltiples capas que constituyen una red[2].

3. Desarrollo

Se procederá a realizar la deducción de las formulas (11) y (12), además se verificará que en la formula (14) cuando $\omega \to 0$ la fórmula (14) se reduce a la fórmula (5).

Formulas de convolución			
Número de formula	$f(t)$	$x(t)$	$f(t) * x(t)$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$
11	$e^{-at}\cos(\beta t+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{-cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}+e^{-at}\cos(\beta t+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+\beta^2}}u(t)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\beta}{(a+\lambda)}\right)$
12	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{1}{2}te^{-at}\sin(\omega t)u(t)$
14	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{1}{2\omega}e^{-at}\sin(\omega t)u(t)+\frac{1}{2}te^{-at}\cos(\omega t)u(t)$

3.1. Fórmula 11

Para la deducción de esta formula, procedemos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
f(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}\cos(\beta\tau+\theta)u(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\cos(\beta\tau+\theta)e^{\lambda(t-\tau)}d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\cos(\beta\tau+\theta)e^{(\lambda t-\lambda\tau)}d\tau
\end{aligned}
$$

La integral la vamos a resolver con ayuda de Octave o Matlab. El código que se utilizó es el siguiente:

Listing 1: Código para calcular la integral de la formula 11

```
clear all;

syms t tau lambda a beta theta;

int1=int(exp(-a*tau)*cos(beta*tau+theta)*exp(lambda*t-lambda*tau),tau,0,t);

simplify(int1)
```

El enlace para checar el codigo es el siguiente:
Integral formula 11

El resultado de la integral es:

$$f(t) * x(t) = \frac{e^{\lambda t}[a\cos(\theta)+\lambda\cos(\theta)-\beta\sin(\theta)]}{a^2+2a\lambda+\beta^2+\lambda^2} - \frac{e^{-at}[a\cos(\theta+\beta t)+\lambda\cos(\theta+\beta t)-\beta\sin(\theta+\beta t)]}{a^2+2a\lambda+\beta^2+\lambda^2}$$

Simplificamos

$$f(t) * x(t) = \frac{e^{\lambda t}[a\cos(\theta)+\lambda\cos(\theta)-\beta\sin(\theta)] - e^{-at}[a\cos(\theta+\beta t)+\lambda\cos(\theta+\beta t)-\beta\sin(\theta+\beta t)]}{a^2+2a\lambda+\beta^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{e^{\lambda t}[a\cos(\theta)+\lambda\cos(\theta)-\beta\sin(\theta)] - e^{-at}[a\cos(\theta+\beta t)+\lambda\cos(\theta+\beta t)-\beta\sin(\theta+\beta t)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}$$

Ejemplo 3.1: Identidad trigonométrica

NOTA: Vamos a probar la identidad

$$A\cos(\theta)+B\sin(\theta) = C\cos(\theta-\phi)$$

Donde:

$$C = \sqrt{A^2+B^2} \qquad \text{y} \qquad \phi = \tan^{-1}(\tfrac{B}{A})$$

Ejemplo 3.2: Identidad trigonométrica

$$\begin{aligned}A\cos(\theta)+B\sin(\theta)&=C\cos(\theta-\phi)\\&=C(\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi))\\&=C(\cos(\phi)\cos(\theta))+C(\sin(\phi)\sin(\theta))\\&=A\cos(\theta)+B\sin(\theta)\end{aligned}$$

Ahora, por el momento solo vamos a trabajar con el numerador de la fraccion de la ecuacion. Vamos a factorizar

$$f(t)*x(t)=\left(\frac{e^{-at}[-a\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)-\lambda\cos(\beta t+\theta)]+e^{\lambda t}[a\cos(\theta)-\beta\sin(\theta)+\lambda\cos(\theta)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-at}[(-a-\lambda)\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)]+e^{\lambda t}[(a+\lambda)\cos(\theta)-\beta\sin(\theta)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-at}[(-a-\lambda)\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)]-e^{\lambda t}[-(a+\lambda)\cos(\theta)+\beta\sin(\theta)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-at}[(-a-\lambda)\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)]-e^{\lambda t}[(-a-\lambda)\cos(\theta)+\beta\sin(\theta)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

Ejemplo 3.3: Numerador de la ecuación

$$\begin{aligned}(-a-\lambda)\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)&=(\sqrt{(-a-\lambda)^2+\beta^2})(\cos(\beta t+\theta-\phi))\\(-a-\lambda)\cos(\theta)+\beta\sin(\theta)&=(\sqrt{(-a-\lambda)^2+\beta^2})(\cos(\theta-\phi))\end{aligned}$$

Sustituyendo lo que nos dio en el numerador

$$f(t)*x(t)=\left(\frac{e^{-at}[(-a-\lambda)\cos(\beta t+\theta)+\beta\sin(\beta t+\theta)]-e^{\lambda t}[(-a-\lambda)\cos(\theta)+\beta\sin(\theta)]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-at}[(\sqrt{(-a-\lambda)^2+\beta^2})(\cos(\beta t+\theta-\phi))]-e^{\lambda t}[(\sqrt{(-a-\lambda)^2+\beta^2})(\cos(\theta-\phi))]}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

Factorizamos la raiz cuadrada

$$f(t) * x(t) = \left(\sqrt{(-a-\lambda)^2+\beta^2)}\right)\left(\frac{e^{-at}(\cos(\beta t+\theta-\phi))-e^{\lambda t}(\cos(\theta-\phi))}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{(a+\lambda)^2+\beta^2)}\right)\left(\frac{e^{-at}(\cos(\beta t+\theta-\phi))-e^{\lambda t}(\cos(\theta-\phi))}{(a+\lambda)^2+\beta^2}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-at}(\cos(\beta t+\theta-\phi))-e^{\lambda t}(\cos(\theta-\phi))}{\sqrt{(a+\lambda)^2+\beta^2})}\right)$$

$$f(t) * x(t) = \left(\frac{e^{-at}(\cos(\beta t+\theta-\phi))-e^{\lambda t}(\cos(\theta-\phi))}{\sqrt{(a+\lambda)^2+\beta^2})}\right)u(t)$$

Y ϕ queda asi:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{(-a-\lambda)}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\beta}{(a+\lambda)}\right)$$

Las simulaciones en Desmos se pueden consultar en el siguiente link:

Grafica Desmos formula 11

La grafica de Matlab es la siguiente:

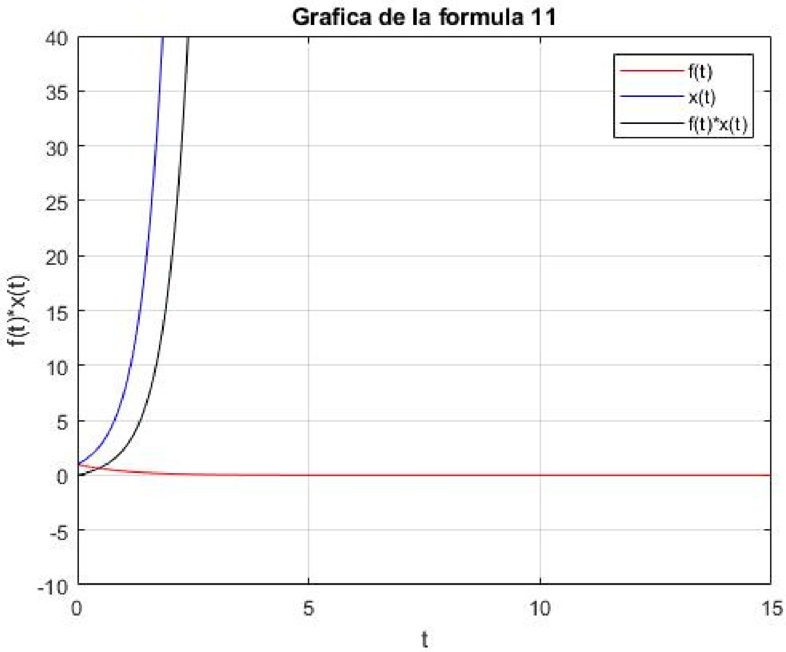

Figura 1: Grafica de la formula 11 hecha en Matlab

3.2. Fórmula 12

Para la deducción de esta formula, procedemos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
f(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)u(\tau)e^{-a(t-\tau)}\sin(\omega(t-\tau))u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)e^{-a(t-\tau)}\sin(\omega(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)e^{(-at+a\tau)}\sin(\omega t-\omega\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Esta integral la vamos a resolver con ayuda de Octave o Matlab, el codigo que se ocupó fue el siguiente:

Listing 2: Código para calcular la integral de la formula 12

```
clear all;

syms t tau  a omega;

int2=int(exp(-a*tau)*cos(omega*tau)*exp(-a*t+a*tau)*sin(omega*t-omega*tau),
   tau,0,t);

simplify(int2)
```

El enlace para checar el codigo es el siguiente:
Integral formula 12

El resultado de la integral es:

$$
\begin{aligned}
f(t) * x(t) &= \frac{te^{-at}\sin(\omega t)}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(te^{-at}\sin(\omega t))
\end{aligned}
$$

$$
f(t) * x(t) = \left(\frac{1}{2}\right)(te^{-at}\sin(\omega t))u(t)
$$

Las simulaciones en Desmos se pueden consultar en el siguiente link:

Grafica Desmos formula 12

La grafica de Matlab es la siguiente:

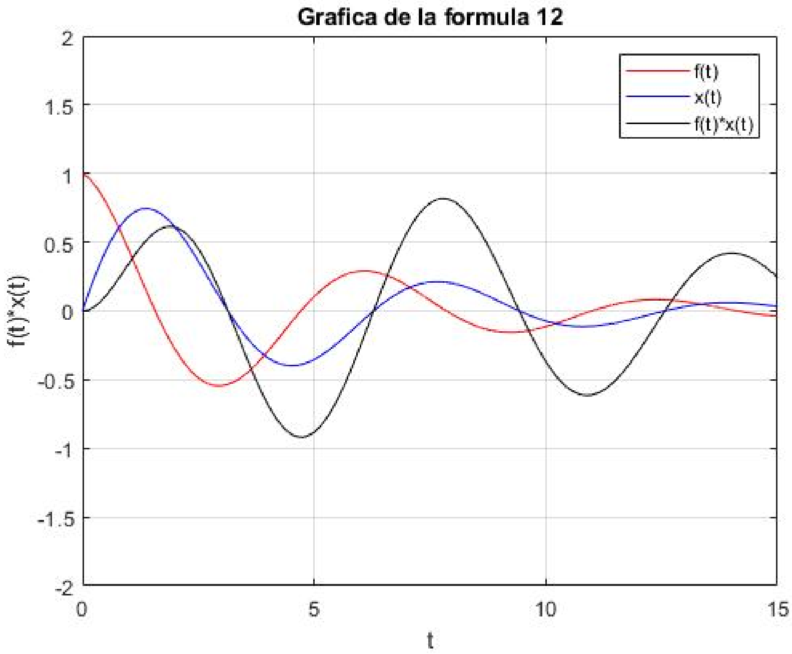

Figura 2: Grafica de la formula 12 hecha en Matlab

3.3. Fórmula 14

En esta formula nos piden verificar que cuando $\omega \to 0$, la formula (14) es igual a la formula (5).

$$f(t) * x(t) = \frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) u(t) + \frac{1}{2} t e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$$

Como $\omega \to 0$ aplicamos un limite

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \to 0} f(t) * x(t) &= \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) + \frac{1}{2} t e^{-at} \cos(\omega t) \right) \\
&= \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \right) + \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{1}{2} t e^{-at} \cos(\omega t) \right) \\
&= \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \right) + \frac{1}{2} t e^{-at} \\
&= \lim_{\omega \to 0} \left(\frac{1}{2} t e^{-at} \cos(\omega t) \right) + \frac{1}{2} t e^{-at} \\
&= \frac{1}{2} t e^{-at} + \frac{1}{2} t e^{-at} \\
&= t e^{-at}
\end{aligned}$$

Para el primer limite aplicamos regla de L'Hôpital.

Entonces tenemos:

$$\lim_{\omega \to 0} f(t) * x(t) = t e^{\lambda t} \qquad \textit{donde} \qquad \lambda = -a$$

Las simulaciones en Desmos se pueden consultar en el siguiente link:

Grafica Desmos formula 5
Grafica Desmos formula 14

Vamos a mostrar la grafica de la formula 5

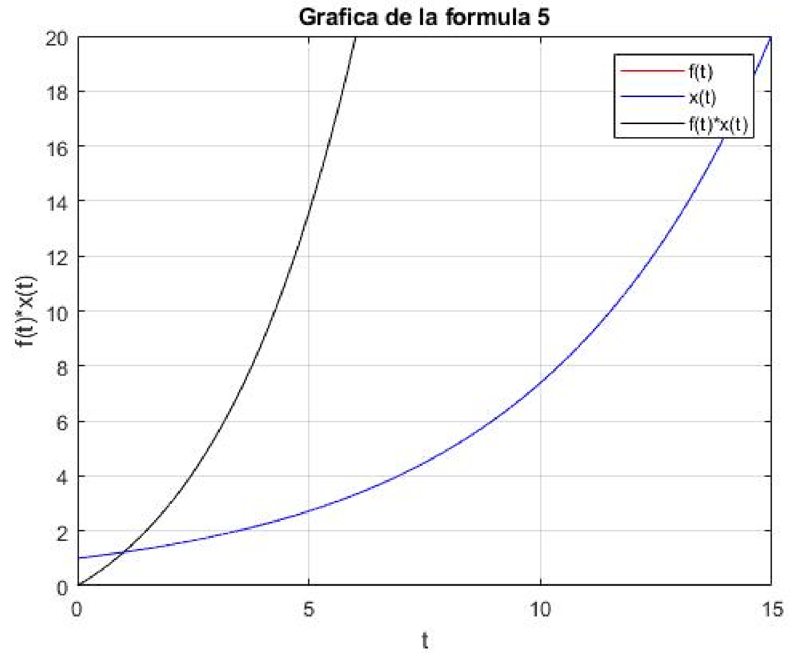

Figura 3: Grafica de la formula 5 hecha en Matlab

La gráfica de la formula 14 es la siguiente:

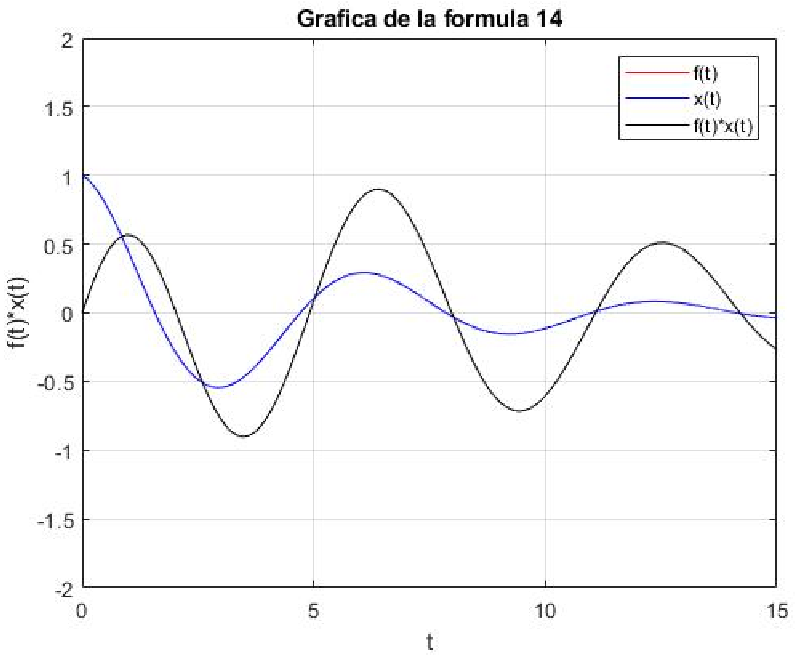

Figura 4: Grafica de la formula 14 hecha en Matlab

Para graficar la formula 14 cuando $\omega \to 0$, tomamos en cuenta que $\lambda = -a$. Entonces la formula 14 nos quedaria de la siguiente manera:

$$f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)u(t) = e^{\lambda t}\cos(\omega t)u(t)$$

$$x(t) = e^{-at}\cos(\omega t)u(t) = e^{\lambda t}\cos(\omega t)u(t)$$

$$f(t) * x(t) = \frac{1}{2\omega}e^{-at}\sin(\omega t)u(t) + \frac{1}{2}te^{-at}\cos(\omega t)u(t)$$

$$= \frac{1}{2\omega}e^{\lambda t}\sin(\omega t)u(t) + \frac{1}{2}te^{\lambda t}\cos(\omega t)u(t)$$

La grafica en Desmos se puede checar en el siguiente link: Grafica Desmos formula 14 cuando $\omega \to 0$

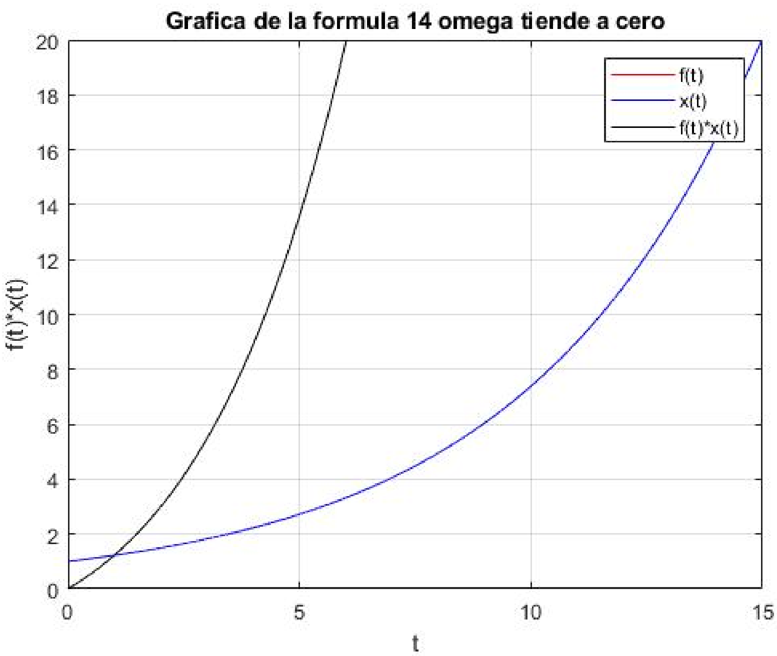

Figura 5: Grafica de la formula 14 cuando omega tiende a cero hecha en Matlab

4. Conclusiones

4.1. Para la parte de LaTeX:

4.1.1. ¿Qué es LaTeXy para que sirve?

Latex, es un sistema que ayuda al usuario a preparar un documento. Con él puedes preparar cualquier tipo de documento para presentarlo tanto en papel como en pantalla tales como manuscritos, cartas, artículos de revistas y tesis.

Existen procesadores de textos tales como Microsoft Word, la diferencia es la calidad profesional de los documentos que produce Latex. La calidad de imprenta de Latex pueden ser usados en areas como química, física, computación, biología, leyes, literatura, música y en cualquier otro tema el cuál usen simbologías.

Otra catacterística es que te permite separar el contenido y el formato del documento. Así tener la oportunidad de concentrarte en generar y escribir ideas en una parte y plasmar esas ideas en otra.

[3].

4.1.2. ¿Qué alternativas a parte de Overleaf existen para producir documentos en LaTeX?

- MiKTeX
- Texmaker
- TeXstudio
- LyX

4.2. Para la parte de convolución:

4.2.1. ¿Qué es la convolución de dos señales?

La operación de convolución entre dos señales $f(t)$ y $x(t)$ genera una nueva señal $g(t)$, la operación se define como:

$$g(t) = f(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad [1].$$

4.2.2. Menciona algunas de las aplicaciones que tiene en Telemática

La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones en ciencias, ingeniería y matemáticas. En el caso de telemática, las aplicaciones son las siguientes:

- Procesamiento de imagenes
  El procesamiento de imágenes en el dominio espacial es un área de estudio visualmente rica que se ocupa de las técnicas de manipulación de píxeles. Se realizan diferentes operaciones sobre las imágenes, que se tratan simplemente como matrices bidimensionales.

- Procesamiento de audio
  Los auditorios, salas de cine y otras construcciones similares dependen en gran medida del concepto de reverberación porque mejora la calidad del sonido en gran medida.

  El proceso en el que la reverberación se simula digitalmente se denomina técnicamente reverberación de convolución". Con la reverberación de convolución, puede convolucionar la respuesta de impulso conocida de un área con la de un sonido deseado para simular el efecto de reverberación de un área en particular.

- Inteligencia artificial
  Las redes neuronales son un área de inteligencia artificial que diseña circuitos imitando conexiones en un cerebro humano. La interconexión entre las neuronas dentro del cerebro se modela como la interconexión entre los nodos de múltiples capas que constituyen una red[2].

4.2.3. ¿Cuáles son las ventajas de hacer convolución de dos señales causales, de longitud infinita y que tengan una sola expresión?

La ventaja de generar señales causales por medio de la convolución es que la señal resultante es mas factible su realización y su comprensión para aquel que la va a leer.

5. Apendice

Codigos que se ocuparon para graficar las formulas 5, 11, 12 y 14.

Los codigos tambien se pueden checar en la siguiente liga:
Codigos de graficas 5, 11, 12, y 14

5.1. Codigos formula 5

Listing 3: Código para graficar la formula 5

```
%%Cierra todas las ventanas y limpia las variables almacenadas
close all;
clear all;

%%Declaracion de variables y asignacion de valores
lambda=0.2;
t=0:0.001:100;

%%Realizamos las operaciones
f=exp(lambda.*t);
x=exp(lambda.*t);
convolucion=t.*exp(lambda.*t);;

%%Graficamos
plot(t,f,'red',t,x,'blue',t,convolucion,'black')

%%Agregamos un titulo, le ponemos etiquetas a los ejes, agregamos una
    leyenda a la grafica, le ponemos cuadricula y le asignamos limites a los
    ejes x e y
title('Grafica de la formula 5');
xlabel('t');
ylabel('f(t)*x(t)');
legend('f(t)','x(t)','f(t)*x(t)');
grid on;
xlim([0,15]);
ylim([0,20]);
```

5.2. Codigos formula 11

Listing 4: Código para graficar la formula 11

```
%%Cierra todas las ventanas y limpia las variables almacenadas
close all;
clear all;

%%Declaracion de variables y asignacion de valores
a=1;
beta=0;
theta=0;
lambda=2;
phi=atan((-beta)/(a+lambda));
t=0:0.001:100;

%%Realizamos las operaciones
f=exp(-a*t).*cos(beta*t+theta);
x=exp(lambda*t);
convolucion=-(-cos(theta-phi).*exp(lambda*t)+exp(-a*t).*cos(beta*t+theta-phi
    ))/(sqrt(((a+lambda)^2)+beta^2));

%%Graficamos
plot(t,f,'red',t,x,'blue',t,convolucion,'black')

%%Agregamos un titulo, le ponemos etiquetas a los ejes, agregamos una
    leyenda a la grafica, le ponemos cuadricula y le asignamos limites a los
    ejes x e y
title('Grafica de la formula 11');
xlabel('t');
ylabel('f(t)*x(t)');
legend('f(t)','x(t)','f(t)*x(t)');
grid on;
xlim([0,15]);
ylim([-10,40]);
```

5.3. Codigos formula 12

Listing 5: Código para graficar la formula 12

```
%%Cierra todas las ventanas y limpia las variables almacenadas
close all;
clear all;

%%Declaracion de variables y asignacion de valores
a=0.2;
omega=1;
t=0:0.001:100;

%%Realizamos las operaciones
f=exp(-a*t).*cos(omega*t);
x=exp(-a*t).*sin(omega*t);
convolucion=(1/2).*t.*exp(-a*t).*sin(omega*t);

%%Graficamos
plot(t,f,'red',t,x,'blue',t,convolucion,'black')

%%Agregamos un titulo, le ponemos etiquetas a los ejes, agregamos una
    leyenda a la grafica, le ponemos cuadricula y le asignamos limites a los
    ejes x e y
title('Grafica de la formula 12');
xlabel('t');
ylabel('f(t)*x(t)');
legend('f(t)','x(t)','f(t)*x(t)');
grid on;
xlim([0,15]);
ylim([-2,2]);
```

5.4. Codigos formula 14

Listing 6: Código para graficar la formula 14

```
%%Cierra todas las ventanas y limpia las variables almacenadas
close all;
clear all;

%%Declaracion de variables y asignacion de valores
a=0.2;
omega=1;
t=0:0.001:100;

%%Realizamos las operaciones
f=exp(-a*t).*cos(omega*t);
x=exp(-a*t).*cos(omega*t);
convolucion=(1/(2*omega)).*exp(-a*t).*sin(omega*t)+(1/2).*t.*exp(-a*t).*cos(
    omega*t);

%%Graficamos
plot(t,f,'red',t,x,'blue',t,convolucion,'black')

%%Agregamos un titulo, le ponemos etiquetas a los ejes, agregamos una
    leyenda a la grafica, le ponemos cuadricula y le asignamos limites a los
    ejes x e y
title('Grafica de la formula 14');
xlabel('t');
ylabel('f(t)*x(t)');
legend('f(t)','x(t)','f(t)*x(t)');
grid on;
xlim([0,15]);
ylim([-2,2]);
```

5.5. Codigos formula 14 cuando omega tiende a cero

Listing 7: Código para graficar la formula 14

```
%%Cierra todas las ventanas y limpia las variables almacenadas
close all;
clear all;

%%Declaracion de variables y asignacion de valores
lambda=0.2;
omega=0.00000001;
t=0:0.001:100;

%%Realizamos las operaciones
f=exp(lambda*t).*cos(omega*t);
x=exp(lambda*t).*cos(omega*t);
convolucion=(1/(2*omega)).*exp(lambda*t).*sin(omega*t)+(1/2).*t.*exp(lambda*
    t).*cos(omega*t);

%%Graficamos
plot(t,f,'red',t,x,'blue',t,convolucion,'black')

%%Agregamos un titulo, le ponemos etiquetas a los ejes, agregamos una
    leyenda a la grafica, le ponemos cuadricula y le asignamos limites a los
    ejes x e y
title('Grafica de la formula 14 omega tiende a cero');
xlabel('t');
ylabel('f(t)*x(t)');
legend('f(t)','x(t)','f(t)*x(t)');
grid on;
xlim([0,15]);
ylim([0,20]);
```

Referencias

[1] [En línea]. Disponible: http://rafneta.github.io/Notas/NotasSyS/index.html (Accedido: 08-sep-2019).

[2] S. H.L. (2017) Better insight into dsp: 10 applications of convolution in various fields. [En línea]. Disponible: https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/dsp-applications-of-convolution-part-2/ (Accedido: 08-sep-2019).

[3] ¿qué es latex y para qué sirve? [En línea]. Disponible: http://micaminomaster.com.co/herramientas-desarrollo/que-es-latex-y-para-que-sirve/ (Accedido: 08-sep-2019).