

§1. Đại cương về bất đẳng thức

Bài 1: Chứng minh rằng:

$$\begin{array}{ll} \text{a, } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} & \text{b, } \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} \geq abc \quad \forall a, b, c > 0 \\ \text{c, } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b + \frac{4(a-b)^2}{a+b} \quad \forall a, b > 0 & \text{d, } a + b \geq 2\sqrt{ab} + \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \quad \forall a, b > 0 \end{array}$$

Bài 2: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{ab}{a^3 + b^3} + \frac{bc}{b^3 + c^3} + \frac{ca}{c^3 + a^3}$$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu a, b, c, t là các số thực dương bất kỳ thì:

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bài 4: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9$$

Bài 5: Giả sử a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 6: Cho các số dương $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ thỏa mãn: $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} \leq \frac{a_3}{b_3}$

Bài 7: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{2a+b+c}{a+b+c} + \frac{2b+c+d}{b+c+d} + \frac{2c+d+a}{c+d+a} + \frac{2d+a+b}{d+a+b}$$

không là số tự nhiên.

Bài 8: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Bài 9: Chứng minh các bất đẳng thức sau với n là số tự nhiên:

$$\text{a, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \text{với } n > 1 \quad \text{b, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$$

§2. Bất đẳng thức giữa

đại lượng trung bình cộng và trung bình nhân (AM - GM)

Bài 1: Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{a^3}{b^3} + b^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{a}{b} + b$

Bài 2: Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x + y + z + \frac{1}{x+y+2z} + \frac{1}{y+z+2x} + \frac{1}{z+x+2y}$$

Bài 3: Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}$ với $x > 0$

b, $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ với $x > 0$

c, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$ với $0 < x < 1$

d, $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$

Bài 5: Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$

Bài 6: Chứng minh $\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{\frac{a^2}{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ với $a > 0, b > 0$

Bài 7: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{c^2a}{b^3(c+a)} + \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 8: Cho 3 số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

Bài 9: CMR với mọi số thực dương x, y ta có: $(1+x) \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right) \geq 256$

Bài 10: Cho hai số thực x, y khác 0. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{1 + y^2} + \frac{y^2}{1 + x^2}$

Bài 11: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 28$$

Bài 12: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, c > 0 \\ ab \geq 12 \quad . \text{Chứng minh rằng: } (a+b+c) + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12} \\ bc \geq 8 \end{array} \right.$$

Bài 13: Cho $x, y, z > 0; x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{a^2} + 27 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c \leq 3$